



TITLE:

On Some Properties of Toeplitz Operators (Operator algebraとその応用)

AUTHOR(S):

吉野, 崇

CITATION:

吉野, 崇. On Some Properties of Toeplitz Operators (Operator algebraとその応用). 数理解析研究所講究録 1973, 177: 125-129

ISSUE DATE:

1973-04

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/107093>

RIGHT:

On some properties of
Toeplitz operators

東北大 教養 吉 野 崇

L^p , $p=2, \infty$ を、複素平面上の単位円周上の Lebesgue 可測函数の class とし、 H^p を、その部分空間で負の Fourier 係数が 0 であるような函数の全体とする。 L^∞ の函数 ϕ が inner とは、 ϕ は H^∞ の函数で $|\phi|=1$ a. e. なる時である。 $\phi \in L^\infty$ に対して、 L_ϕ は、 $L_\phi f = \phi \cdot f$, $\forall f \in L^2$ で定義される L^2 上の Laurent operator を、 T_ϕ は、 P を L^2 から H^2 への orthogonal projection とするとき、 $T_\phi = PL_\phi P$ で定義される H^2 上の Toeplitz operator を表わすものとする。 T_ϕ が analytic とは、 $\phi \in H^\infty$ の場合である。

我々は、 L_ϕ の不変部分空間及び T_ϕ の spectrum の性質を調べ、
A. Brown⁺ R. G. Douglas, A. Brown⁺ P. R. Halmos, R. Goor, P. Hartman⁺
A. Wintner 等によって既に知られている結果が、系として整理されることを示す。

T_ϕ の性質を調べる上で、次の結果に負う所が多い。

定理 1 (A. Beurling [1]) T_z の $\{0\}$ 以外の不変部分空間 M は、

$M = T_g H^2$, g は inner なる型で表わされる。

補助定理 1 (A. Brown⁴ P. R. Halmos [3]) H^2 上の任意の有界線型作用素 A が, an analytic Toeplitz operator なるための必要十分条件は, A が T_z と可換なることである。

補助定理 2 T_z の不変部分空間は, 凡て, hyper-invariant, 即ち, T_z と可換な凡ての有界線型作用素の不変部分空間である。

補助定理 2 により次の結果を得る。

定理 2 T_ϕ が non-analytic ならば, H^2 を含むような L_ϕ の不変部分空間は, L^2 それ自身しかない。

従って,

系 1 (A. Brown⁴ P. R. Halmos [3]) $\phi \in L^\infty$ が non-constant ならば, H^2 を含む L_ϕ の reducing subspace は, L^2 それ自身しかない。

特に, T_ϕ が analytic ならば, L_ϕ は T_ϕ の normal extension だけから,

系 2 $\phi \in H^\infty$ が non-constant ならば, L_ϕ は T_ϕ の minimal normal extension である。

又, $(I-P)L_\phi^*(I-P)$ を $L^2 \ominus H^2$ 上の Toeplitz operator とみなしてよいことに注意すれば, 定理 2 によって

系 3 T_ϕ が non-analytic ならば, H^2 に含まれる L_ϕ の不変部分空間は, $\{0\}$ だけである。

系3の応用として次を得る。

定理3 $\|T_\phi\| \leq 1$ なる T_ϕ に対して、 $\{f \in H^2 : \|T_\phi^n f\| = \|f\|, n=0,1,2,\dots\} \neq \{0\}$ ならば、 ϕ は inner である。

系4 (R. Geor [4]) $\phi \in L^\infty$ が non-constant で $\|T_\phi\| \leq 1$ ならば、 T_ϕ は completely non-unitary, 即ち, unitary part を含まない。

系5 (A. Brown & P.R. Halmos [3]) T_ϕ が unitary ならば、 ϕ は、絶対値 1 の constant である。

系4と系5とから、我々は、次の問題に到達する。

問題 凡ての non-normal Toeplitz operator は、completely non-normal か? 即ち, normal part を含まないか?

この問題の partial answer として次を得る。

系6 $\phi \in H^\infty$ が non-constant ならば、 T_ϕ は completely non-normal である。

系7 T_ϕ が norm-achieved (i.e., $\exists f \in H^2, f \neq 0; \|T_\phi f\| = \|T_\phi\| \|f\|$) で, hyponormal (i.e., $T_\phi^* T_\phi \geq T_\phi T_\phi^*$) ならば、 ϕ は inner function の scalar 倍である。

系7の特別な場合として、

系8 (A. Brown & P.R. Halmos [3]) T_ϕ が isometric になるための必要十分条件は、 ϕ が inner になることである。

次に、定理1によって、次の結果が得られる。

定理4 $\phi \in L^\infty$ が non-constant ならば、 $\sigma_p(T_\phi) \cap \overline{\sigma_p(T_\phi^*)} = \emptyset$, ここ

で、 $\sigma_p(T_\phi)$ は、 T_ϕ の point spectrum を、 $\overline{\sigma(T_\phi^*)}$ は、 $\sigma(T_\phi^*)$ の complex conjugate を表わすものとする。

従って、

系 9 (A. Brown & P. R. Halmos [3]) 0 と I 以外の idempotent Toeplitz operator はない。

系 10 (A. Brown & R. G. Douglas [2]) T_ϕ が、non-zero で、partial isometric ならば、 ϕ か又は $\bar{\phi}$ が inner である。

系 11 $\phi \in L^\infty$ が non-constant で、 T_ϕ が hyponormal ならば、 $\sigma_p(T_\phi) = \emptyset$ である。

系 11 の特別な場合として、

系 12 (P. Hartman & A. Wintner [5]) $\phi \in L^\infty$ が non-constant で T_ϕ が self-adjoint ならば、 $\sigma_p(T_\phi) = \emptyset$ である。

H^2 上の an isometry W が、 H^2 上の nearly normal operator A (i.e., A は A^*A と可換) と可換ならば、 $A = V|A|$ を A の polar 分解とすると、 W は、 V 及び $|A|$ と可換だから (see [7]), 補助定理 1 と系 10 とから、次を得る。

系 13 (T. Itô & T. K. Wong [6]) T_ϕ が、nearly normal で、analytic ならば、 ϕ は、inner function の scalar 倍である。

文 献

- [1] A. Beurling, On two problems concerning linear transformations in Hilbert space, Acta Math. 81 (1949), 239 - 255.
- [2] A. Brown[†] R.G. Douglas, Partially isometric Toeplitz operators, Proc. A.M.S. 16-4 (1965), 681 - 682.
- [3] A. Brown[†] P.R. Halmos, Algebraic properties of Toeplitz operators, J. Reine Angew. Math. 213 (1963), 89 - 102.
- [4] R. Goor, On Toeplitz operators which are contractions, Proc. A.M.S. 34-1 (1972), 191 - 192.
- [5] P. Hartman[†] A. Wintner, The spectra of Toeplitz's matrices, Amer. J. Math. 76 (1954), 867 - 882.
- [6] T. Itô[†] T.K. Wong, Subnormality and quasinormality of Toeplitz operators, Proc. A.M.S. 34-1 (1972), 157 - 164.
- [7] T. Yoshino, On the commuting extensions of nearly normal operators, Tôhoku Math. J. (to appear).